

УДК 532.516

СТРУКТУРА НЕОДНОРОДНОСТИ ВИХРЕВОГО ПОЛЯ ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь

Введение

Задача о течении вязкой жидкости между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами относится к классическим проблемам гидродинамики. Прикладные аспекты данного вопроса связаны с гидродинамической теорией смазки, с формированием вихревых структур в природных и технических гидродинамических системах. В данной работе рассматривается неклассический вариант задачи о течении жидкости между соосными вращающимися цилиндрами. А именно: учитывается рэлеевская сила сопротивления $\mathbf{F} = -\zeta \mathbf{v}$, где $\zeta > 0$ – коэффициент «внешнего» трения; \mathbf{v} – вектор скорости. Модель сопротивления Рэлея оказалась эффективной в задачах тепломассообмена при кристаллизации полупроводников в условиях орбитального полета [1]. Основная идея этого подхода состоит в том, что гидродинамическое описание расплава учитывает наличие кластерных образований, которые оказывают сопротивление течению. Обычно в теоретических расчетах используется линейный вариант силы трения: $\zeta = \text{const}$. Далее полагаем, что коэффициент сопротивления монотонно растет при увеличении $|\mathbf{v}|$ и является четной функцией скорости: $\zeta = \zeta(\mathbf{v}^2, T, r)$, $\partial \zeta / \partial (\mathbf{v}^2) > 0$. Несколько новых аналитических решений стационарных уравнений гидродинамики вязкой жидкости с учетом нелинейной внешней силы сопротивления течению построены и изучены в [2]–[4]; в этих статьях были рассмотрены плоские двумерные движения.

Цель работы: изучить воздействие силы $\mathbf{F} = -\zeta \mathbf{v}$ на завихренность течения жидкости между вращающимися цилиндрами.

Постановка задачи

Для вязкой несжимаемой жидкости в полярных координатах (r, φ) рассмотрим следующий класс стационарных цилиндрических течений:

$$v_r \equiv 0, \quad v_\varphi = v(r), \quad p = p(r), \quad T = T(r); \quad (1)$$

$$F_r \equiv 0; \quad F_\varphi = F_\varphi(\mathbf{v}^2, T, r); \quad q_v = q_v(\mathbf{v}^2, T, r); \quad c_p, \lambda, \mu, \rho - \text{const};$$

$$\tau_{rr} \equiv 0; \quad \tau_{\varphi\varphi} \equiv 0; \quad \tau_{r\varphi} = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right).$$

Здесь $\mathbf{v}(v_r, v_\varphi)$ – вектор скорости; ρ – плотность; $\mathbf{F}(F_r, F_\varphi)$ – вектор массовой силы; $\tau_{rr}, \tau_{\varphi\varphi}, \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}$ – компоненты девиатора тензора напряжений; T – температура; c_p – удельная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; μ – коэффициент динамической вязкости. Объемный источник энергии $q_v(v^2, T, r)$ моделирует воздействие внутренних источников тепла и теплообмен жидкости с внешней средой. Для диссипативной функции Φ принимаем оценку $\Phi \ll |q_v|$, т. е. рассматриваем процессы, для которых можно пренебречь выделением тепла за счет вязкой диссипации энергии.

Движение (1) определяется уравнениями Навье–Стокса и уравнением энергии [5], которые можно записать в виде динамической системы:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r^2} - \frac{F_\varphi}{v}; \quad \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{q_v}{\lambda}; \quad (2)$$

$$F_\varphi = -\zeta v; \quad \zeta = \zeta(v^2, T, r); \quad q_v = q_v(v^2, T, r); \quad v = \mu / \rho.$$

Давление $p(r)$ подсчитывается автономно от системы (2):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{v^2}{r}. \quad (3)$$

Очевидно, что уравнение неразрывности выполняется тождественно. Далее будем применять безразмерные величины, обозначая их чертой сверху: $\bar{v} = v/v_1$, $\bar{\tau} = \tau/v_1$, $\bar{r} = r/r_0$, где $T - T_0 = v_1 \tau / c_1$; c_1 , r_0 , v_1 – положительные постоянные, имеющие размерность удельной теплоемкости Дж/(кг · град), длины и скорости, соответственно; T_0 – отсчетное значение температуры.

Для коэффициента сопротивления и источника энергии применяем частные зависимости следующего вида:

$$\bar{\zeta} \equiv r_0^2 \zeta / v = [2(1 - 3\bar{\tau}^2 + \bar{v}^2) - 1] / \bar{r}^2; \quad (4)$$

$$\bar{q}_v \equiv c_1 r_0^2 q_v / (\lambda v_1^2) = 2\bar{\tau}(\bar{\tau}^2 - 3\bar{v}^2 - 1) / \bar{r}^2. \quad (5)$$

В этом случае система (2) имеет точное решение [6]:

$$\bar{v} = 2\varepsilon \cdot \sin(2\alpha) / \delta; \quad \bar{\tau} = (1 - \varepsilon^2) / \delta; \quad (6)$$

$$\delta = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cdot \cos(2\alpha); \quad \alpha \equiv \bar{R} / 2 = \ln(r/r_0).$$

Здесь ε – параметр решения. В частном случае $\varepsilon^2 = 1$ получаем изотермическое течение, $T = T_0 \equiv \text{const}$. Для функций (4), (5) явная зависимость от радиальной координаты характеризует структурную неоднородность, присущую внешней силе сопротивления за счет образования кластеров. В формуле (5) разность $\bar{\tau}^2 - 3\bar{v}^2$ можно интерпретировать как конкуренцию между выделением тепловой энергии и потерями кинетической энергии вязкого потока. Динамические и тепловые свойства коэффициента сопротивления определяются неравенствами $\partial \bar{\zeta} / \partial (\bar{\tau}^2) < 0$, $\partial \bar{\zeta} / \partial (\bar{v}^2) > 0$. Условие $\zeta > 0$ выполнено при

$$-\frac{\pi}{2} - \Delta < 2\alpha < \frac{\pi}{2} + \Delta; \quad \frac{18 - \sqrt{224}}{10} < \varepsilon^2 < \frac{18 + \sqrt{224}}{10},$$

где $\Delta > 0$ – малое конечное число.

Данная работа является продолжением нашего исследования [6] и содержит результаты численного анализа структуры неоднородности вихревого поля при течении жидкости в зазоре между вращающимися цилиндрами.

Цилиндрическое течение Куэтта: неклассический вариант. При $\varepsilon = 1$ решение (6) имеет вид:

$$\bar{v} = \frac{\sin \bar{R}}{1 + \cos \bar{R}}; \quad \bar{p} \equiv \frac{(p - p_0)}{\rho v_1^2} = \bar{v} - \frac{\bar{R}}{2}; \quad (7)$$

$$\bar{\zeta} \equiv r_0^2 \zeta / \nu = (1 + 2\bar{v}^2) / \bar{r}^2; \quad \bar{r} \neq \exp(\pi/2).$$

Условие $p > 0$ обеспечивается подходящим выбором константы $p_0 > 0$. Данное решение справедливо на конечном отрезке r и определяет течение между двумя непроницаемыми коаксиальными цилиндрами. На обеих граничных окружностях выполнено условие прилипания.

Возможны следующие три варианта (рис. 1). Вариант 1: $r \in [r_0, r_1]$, $0 < r_0 < r_1$. Вариант 2: $r \in [r_2, r_0]$, $0 < r_2 < r_0$. Вариант 3: $r \in [r_2, r_1]$, $0 < r_2 < r_0 < r_1$. Для варианта 1 имеем: внутренний цилиндр $r = r_0$ неподвижен, $v_\varphi(r = r_0) = 0$, а внешний цилиндр $r = r_1$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = v_\varphi(r = r_1) / r_1$. Для варианта 2 имеем: внешний цилиндр $r = r_0$ неподвижен, $v_\varphi(r = r_0) = 0$, а внутренний цилиндр $r = r_2$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_2 = v_\varphi(r = r_2) / r_2$. Вариант 3 является объединением вариантов 1 и 2: внутренний ($r = r_2$) и внешний ($r = r_1$) цилиндры вращаются вокруг их общей оси; на линии $r = r_0$ жидкость неподвижна. Ясно, что при $r = r_0$ функция $p = p(r)$ имеет перегиб: $r = r_0$, $\bar{R} = 0$, $v = 0$, $dp/dr = 0$, $d^2 p / dr^2 = 0$, $d^3 p / dr^3 \neq 0$.

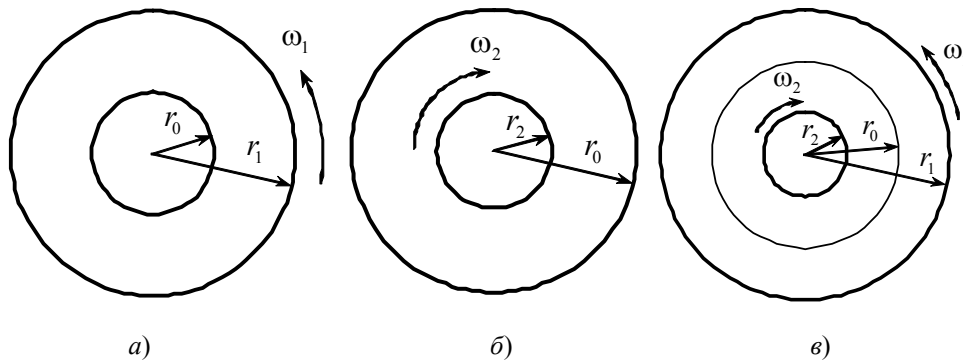


Рис. 1. Схема расположения подвижного и неподвижного цилиндров для трех вариантов течения: части а, б, в соответствуют вариантам 1, 2, 3

Вихрь скорости $\omega(\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z)$ имеет только одну компоненту:

$$\omega_r \equiv 0; \quad \omega_\varphi \equiv 0; \quad \omega_z = [v_\varphi + r(dv_\varphi / dr)] / (2r),$$

где z – координата, отсчитываемая вдоль оси цилиндра. В результате вычислений получаем:

$$\bar{\omega} \equiv \omega_z r_0 / v_1 = [1 + \bar{p} + (\bar{R}/2) + (\bar{p} + (\bar{R}/2))^2] / (2\bar{r}).$$

Зависимость (7) показывает, что для всех представленных здесь вариантов отсутствуют точки с нулевой завихренностью: $\bar{\omega}(\bar{R}, \bar{p}) \neq 0$. Безразмерные градиент давления и вязкое касательное напряжение вычисляются по формулам:

$$\bar{\pi} \equiv \frac{d\bar{p}}{d\bar{r}} = \frac{(\bar{v})^2}{\bar{r}}; \quad \bar{\tau}_{r\varphi} \equiv \frac{\tau_{r\varphi}}{\rho v_1^2} = \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \left(2 \frac{d\bar{v}}{d\bar{R}} - \bar{v} \right); \quad \bar{v} = \frac{\mu}{\rho v_1 r_0}; \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{R}} = \frac{1}{1 + \cos \bar{R}}.$$

Величина $1/\bar{v}$ есть число Рейнольдса; при проведении вычислений оно принято для определенности равным единице. В данном классе решений нет ограничений на выбор числа Рейнольдса.

Изотермическое течение: результаты расчетов. Известно, что безразмерное число Тейлора Ta и функция Рэлея $R_s = d(v_r r)^2 / dr$ позволяют анализировать условия стабилизации профиля скорости в зазоре между цилиндрами. Обсуждение этого вопроса и библиография проблемы приведены в [7]. Для качественного и количественного описания свойств неклассического течения (7) здесь применяются два способа подсчета числа Тейлора. Число Ta_1 строим на основе функции завихренности $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{r})$:

$$Ta_1 = \frac{d}{d\bar{r}} [(\bar{\omega} \bar{r}^2)^2] / \left[\bar{r}^5 \left(\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{r}} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Число Ta_2 строим на основе угловой скорости $\Omega = \bar{v} / \bar{r}$:

$$Ta_2 = \frac{d}{d\bar{r}} [(\Omega \bar{r}^2)^2] / \left[\bar{r}^5 \left(\frac{d\Omega}{d\bar{r}} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Функция Рэлея имеет вид:

$$R_s = \frac{d}{d\bar{r}} [(\bar{v} \bar{r})^2]. \quad (10)$$

Еще одним важным источником информации является зависимость момента \bar{M}_1 вязких сил и момента \bar{M}_2 сил сопротивления от радиальной координаты. Для подсчета этих величин получены следующие формулы:

$$\bar{M}_1 = 2\pi \bar{\tau}_{r\varphi} \bar{r}^2; \quad \bar{M}_2 = -\pi \bar{v} \bar{\zeta} \bar{v} \bar{r}^3. \quad (11)$$

Приведем здесь некоторые результаты расчетов. На рис. 2 для варианта 3 (рис. 1, в) показаны зависимости завихренности $\bar{\omega}$, угловой скорости Ω и суммарного момента $\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$ от радиальной координаты \bar{r} ; темным кружком отмечена линия торможения $\bar{r} = 1$. Хорошо видно, что перемена знака функции $\bar{M}(\bar{r})$ происходит на конечном удалении от окружности $r = r_0$.

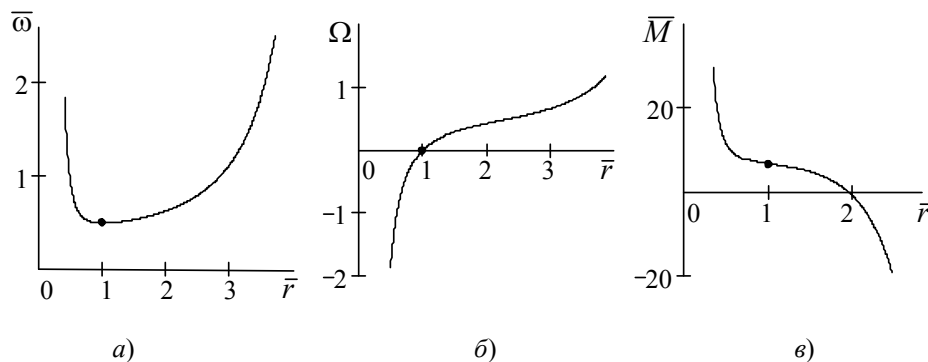


Рис. 2. Изотермическое течение в зазоре между двумя вращающимися цилиндрами:
а – завихренность; б – угловая скорость; в – суммарный момент вязких сил и сил сопротивления

Графическая информация, представленная на рис. 3 и 4, позволяет сопоставить друг с другом свойства течений для вариантов 1 и 2, соответственно. Из рассмотрения рис. 3, а и 4, а следует, что различаются знаки функции Рэлея $\bar{R}_s(\bar{r})$ и знаки моментов $\bar{M}_2(\bar{r})$ сил сопротивления. Знаки моментов $\bar{M}_1(\bar{r})$ вязких сил одинаковые: по мере удаления от неподвижного цилиндра $\bar{r}=1$ момент $\bar{M}_1(\bar{r})$ возрастает. На рис. 3, б и 4, б показаны зависимости числа Тейлора Ta_1 от градиента давления $\bar{\pi}$, от завихренности $\bar{\omega}$ и от вязкого касательного напряжения $\bar{\tau}_{rp}$. Для обоих вариантов функциональные связи $Ta_1(\bar{\pi})$ и $Ta_1(\bar{\omega})$ одинаковые в качественном отношении. Принципиальное различие между течениями с подвижным внешним (рис. 3, б) и подвижным внутренним (рис. 4, б) цилиндрами состоит в том, что для варианта 1 зависимость $Ta_1(\bar{\tau}_{rp})$ неоднозначная: одному значению вязкого касательного напряжения соответствуют два значения критерия Ta_1 . Аналогичная неоднозначность наблюдается для зависимости $Ta_2(\bar{\tau}_{rp})$ (рис. 3, в). Для варианта 1 каждая из функций $Ta_2(\bar{\pi})$ и $Ta_2(\bar{\omega})$ – немонотонная, имеет отчетливо выраженный максимум (рис. 3, в). Вместе с тем для варианта 2 функции $Ta_2(\bar{\omega})$, $Ta_2(\bar{\tau}_{rp})$ и $Ta_2(\bar{\pi})$ имеют по два экстремума – один минимум и один максимум (рис. 4, в). Здесь максимум функции $Ta_2(\bar{\pi})$ не показан – соответствующая точка находится вне интервала, представленного на рис. 4, в.

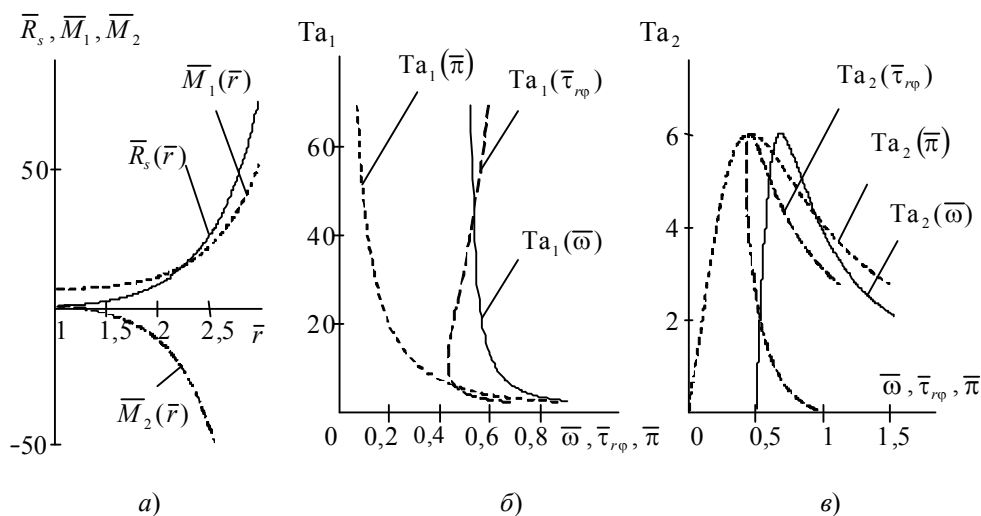


Рис. 3. Свойства изотермического течения для варианта 1: неподвижен внутренний цилиндр

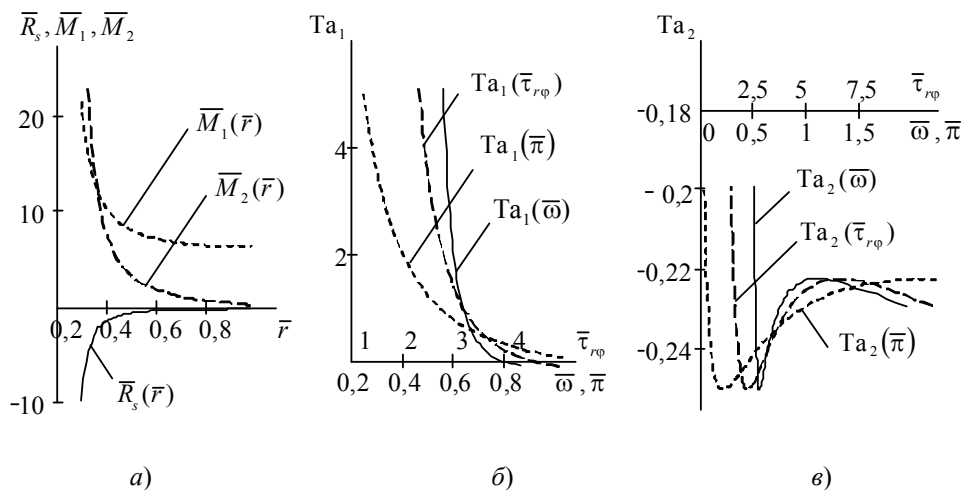


Рис. 4. Свойства изотермического течения для варианта 2:
неподвижен внешний цилиндр

Неизотермическое течение: результаты расчетов. Дальнейший анализ основан на формулах (6). Радиальный тепловой поток $q_r = -\lambda(dT/dr)$ в безразмерном виде записывается так: $\bar{q} = c_1 r_0 q_r / \lambda \nu_1^2 = -d\bar{\tau}/d\bar{r}$. Для количественного описания структуры неоднородности данного течения применяем формулы (8)–(11). Из (6) следует, что $\delta > 0$ при $\varepsilon^2 \neq 1$. Если $\varepsilon^2 < 1$, то $\tau > 0$, течение происходит в «горячей» области, $T > T_0$. Если $\varepsilon^2 > 1$, то $\tau < 0$, имеем «холодную» область, $0 < T < T_0$. Результаты расчетов вариантов 1 и 3 (рис. 1) для «горячей» области даны на рис. 5 и 6.

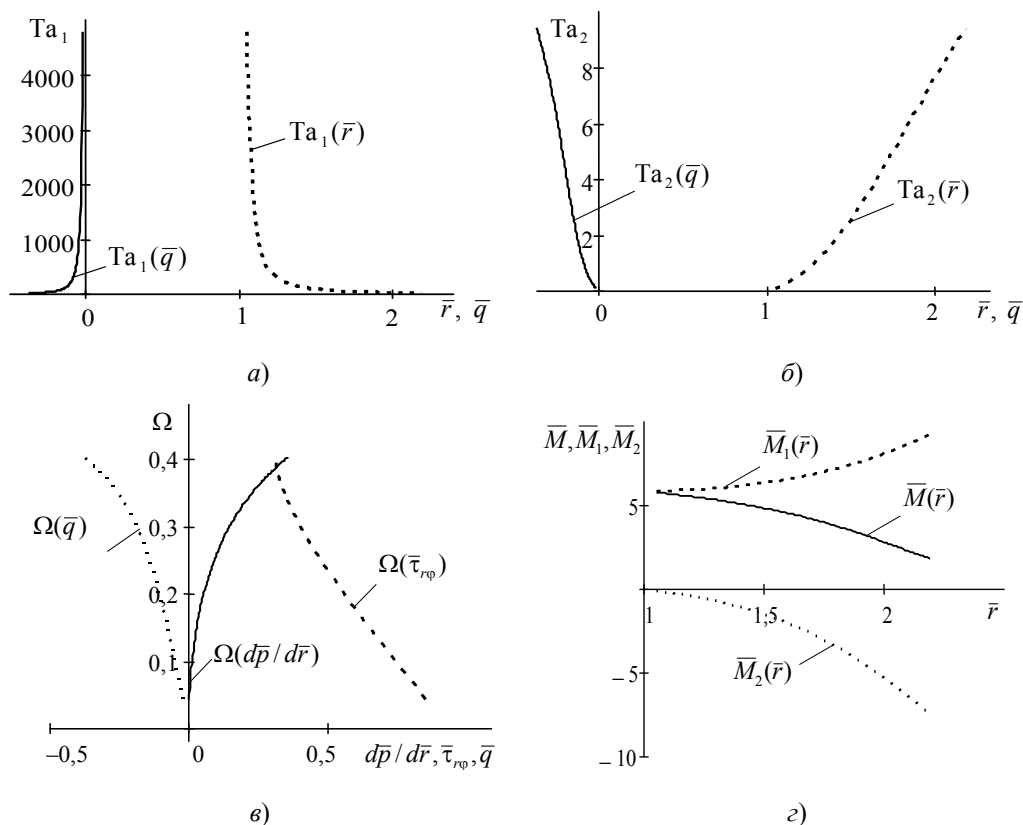


Рис. 5. Неизотермические свойства вихревого поля в «горячей» области для варианта 1:
неподвижен внутренний цилиндр; $\varepsilon = 0,6$, $r_1 = 2,19$, $r_0 = 1,05$

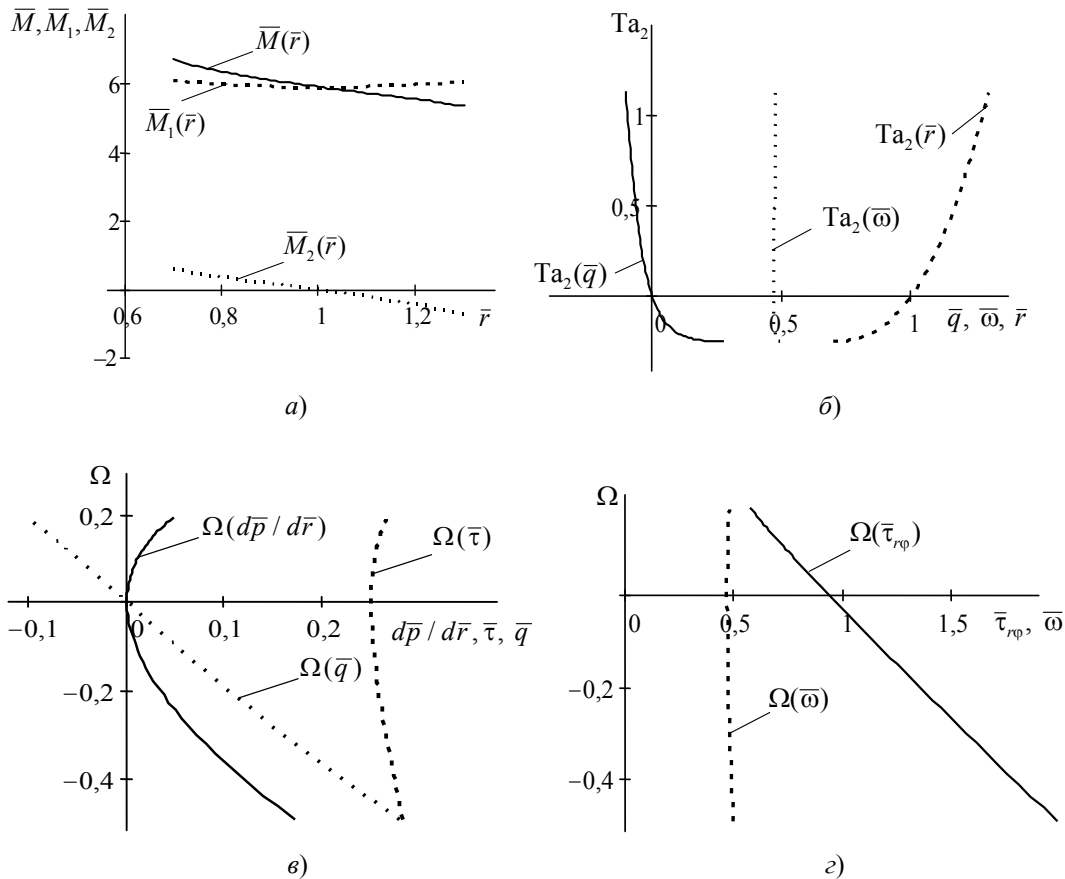


Рис. 6. Неизотермические свойства вихревого поля в «горячей» области для варианта 3: внутренний и внешний цилиндры вращаются в противоположных направлениях; $e = 0,6, r_1 = 1,3, r_0 = 0,7$

Из рис. 5, а и б следует, что числа Тейлора Ta_1 и Ta_2 по-разному реагируют на увеличение модуля теплового потока. А именно: $d(Ta_1)/d|\bar{q}| < 0$, $d(Ta_2)/d|\bar{q}| > 0$. Значит, убыванию функции $Ta_1(|\bar{q}|)$ соответствует возрастание функции $Ta_2(|\bar{q}|)$. Градиент давления и вязкое касательное напряжение оказывают конкурентное воздействие на угловую скорость течения: при росте $d\bar{p}/d\bar{r}$ наблюдается рост Ω , а при увеличении $\tau_{r\phi}$ угловая скорость уменьшается (рис. 5, в). Момент вязких сил \bar{M}_1 и модуль момента сил сопротивления $|\bar{M}_2|$ монотонно растут по мере удаления от неподвижного внутреннего цилиндра, рис. 5, г.

Закключение

Подробно изучено новое точное аналитическое решение (6), определяющее стационарное течение вязкой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами. Центральным пунктом применяемой гидродинамической модели является внешняя сила трения Рэлея. Рассмотрены изотермический и неизотермический режимы движения жидкости. Проведены числовые расчеты и представлены варианты течения, относящиеся к подвижному/неподвижному внешнему и внутреннему цилиндрам. Установлены функциональные связи числа Тейлора с градиентом давления, с вязким касательным напряжением, с удельным тепловым потоком и с завихренностью течения. Вычислены моменты вязких сил и сил сопротивления.

Литература

1. Кластерная модель структуры расплавов в погранслое и ее гидродинамическое описание при моделировании процессов кристаллизации полупроводников в космосе / А. В. Картавых [и др.] // Поверхность. Рентгенов., синхротрон. и нейтрон. исслед. – 2004. – № 6. – С. 91–98.
2. Шабловский, О. Н. Тригонометрический профиль скорости сдвигового течения вязкой жидкости / О. Н. Шабловский // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 5, № 32 (249). – С. 77–82.
3. Шабловский, О. Н. Внешняя сила трения и стационарные вихревые процессы при течении вязкой жидкости на плоскости / О. Н. Шабловский // Техн. механика. – 2012. – № 2. – С. 83–93.
4. Шабловский, О. Н. Вихрь скорости и производство энтропии в релаксирующем потоке вязкой жидкости с внутренними источниками / О. Н. Шабловский // Изв. высш. учеб. заведений и энергет. об-ний СНГ. Энергетика. – 2011. – № 5. – С. 55–65.
5. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М. : Наука, 1974. – 712 с.
6. Шабловский, О. Н. Нелинейное сопротивление и завихренность течения жидкости между коаксиальными вращающимися цилиндрами / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Ученые записки Забайкал. гос. ун-та. Физика. Математика. Техника. Технология. – 2016. – Т. 11, № 4. – С. 59–68.
7. Белоцерковский, О. М. Турбулентность: новые подходы / О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин, В. М. Чечеткин. – М. : Наука, 2003. – 286 с.

Получено 29.12.2016 г.